Д. А. Абрамов

Казань, quaerix@gmail.com

СВЯЗЬ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТОМ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ И ЕВКЛИДОВЫМ МОМЕНТОМ ИНЕРЦИИ

В классических работах Сен-Венана коэффициент жесткости кручения упругих балок с односвязным поперечным сечением Ω задается следующим выражением (см., например, [1]):

$$P(\Omega) = 2 \iint\limits_{\Omega} v \, dx \, dy,$$

где $v = v(x, y)$ — решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta v = -2$ с краевым условием $v = 0$. В качестве геометрического параметра, эквивалентного коэффициенту жесткости кручения, в работе [2] введен функционал $I(\partial\Omega)$, называемый моментом инерции относительно границы:

$$I(\partial\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \operatorname{dist}^2(x, y) \, dx \, dy,$$

где $\operatorname{dist}(x, y)$ есть расстояние от точки $(x, y) \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω. Обозначим через $\lambda(\mathcal{A}) = \sup\limits_{\Omega \in \mathcal{A}} P(\Omega)/I(\partial\Omega)$ точную константу для некоторого класса областей $\mathcal{A}$. Пусть $\lambda \equiv \lambda(\mathcal{A})$, если $\mathcal{A}$ — класс односвязных областей (известно, что $\lambda \leqslant 64$). Л. В. Ковалевым (по его устному сообщению 27.10.2002), а впоследствии Д. Х. Гиниятовой и Р. Г. Салахудиновым [3] было показано, что $\lambda > 4$ и $\lambda > 4.08$, соответственно.

Для уточнения константы λ рассмотрим два класса областей. Обозначим через $\mathcal{ST}(n, a)$ класс звездообразных областей с n лучами и отношением высоты луча к его основанию, равному a; также введем класс "снежинок" $\mathcal{SN}(n,a)$ (в отличие от класса $\mathcal{ST}$, лучи областей из $\mathcal{SN}$ представляют собой прямоугольники) с аналогичными параметрами. Проведенный численный анализ позволяет сделать следующее

Утверждение 1.

1) *В классе* $\mathcal{ST}(n,a)$ *верна оценка* $\lambda \geqslant \lambda(\mathcal{ST}) > 4.64$, *и приближенное равенство* $P(\Omega) \approx 4.64I(\partial\Omega)$ *выполняется для параметров* $n = 7$ *и* $a \approx 3.9$;

2) *в классе* $\mathcal{SN}(n,a)$ *верна оценка* $\lambda \geqslant \lambda(\mathcal{SN}) > 4.8$, *и приближенное равенство* $P(\Omega) \approx 4.8I(\partial\Omega)$ *выполняется для* $n = 6$ *и* $a \approx 1.88$.

Утверждение 2. $\lambda > 6$ *в классе односвязных областей.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. *Кручение упругих тел.* – М.: ГИФМЛ, 1963. – 688 с.

2. Авхадиев Ф. Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* // Матем. сборник. – 1998. – Т. 189. – № 12. – С. 3–12.

3. Гиниятова Д. Х., Салахудинов Р. Г. *Евклидовый момент инерции и модифицированная жесткость кручения* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2007. – Т. 35. – С. 74–75.

Ф. Г. Авхадиев

Казань, Farit.Avhadiev@ksu.ru

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА Е. НИКОЛАИ

Пусть Ω — односвязная область на плоскости, а $P(\Omega)$ — коэффициент ее жесткости кручения по классической модели